Leçon 20 : Racines n-ièmes d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Applications.

Pré-requis :

- Définition et propriétés des nombres complexes, module, argument d'un nombre complexe.
- Ecriture trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe.

Cadre : Au choix d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on rapporte le plan euclidien $\mathcal{P}$ de dimension 2 au plan complexe $\mathbb{C}$, où, pour tout point M de coordonnées (x, y), on lui associe un unique nombre complexe z, appelé *affixe de* M, tel que $z = x + iy$, où x et y sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M dans $\mathbb{R}^2$, et où i est le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

Sauf mention explicite du contraire, n désignera un entier naturel non nul et z un nombre complexe, que l'on écrira toujours sous forme exponentielle, c'est à dire sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$, où ρ désigne le *module de* z et θ l'*argument de* z modulo 2π.

Objectif : Rechercher les éventuelles solutions d'une équation d'inconnue z de la forme $z^n = z'$, où z' est un nombre complexe donné.

1 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1. *On appelle* racine n-ième de z' *un nombre complexe z tel que $z^n = z'$, ce qui est équivalent à dire que z est racine du polynôme $P(Z) = Z^n - z'$.*

Remarquons immédiatement que les racines de 0, c'est $\{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n = 0\} = \{0\}$. Donc 0 n'a qu'une seule racine, lui-même. Dans la suite donc, on s'intéressera qu'au cas où $z' \neq 0$.

Proposition 2. *Le polynôme P défini à la définition 1. admet exactement n racines distinctes dans $\mathbb{C}$, notées z_k, de la forme*

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)},\ \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$$

On note $\mathbb{S}_n = \{z_k, k \in \{0, \dots, n-1\}\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de z'.

Preuve. Posons $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = re^{i\alpha}$, on a :

$$P(z) = 0 \Longleftrightarrow z^n - z' = 0 \Longleftrightarrow z^n = z' \Longleftrightarrow \rho^n e^{in\theta} = re^{i\alpha} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \alpha \bmod(2\pi) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}} \\ \theta = \dfrac{\alpha}{n} \bmod\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \end{cases}$$

D'où l'existence des racines et leur écriture. Pour l'unicité, on remarque qu'on a, $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$z_{n+k} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n+k)\pi}{n}\right)} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} e^{2i\pi} = z_k$$

■

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4=1+i$.
Solution : Posons $z=\rho e^{i\theta}$. On a $r=|1+i|=\sqrt{2}$ et $\alpha=\operatorname{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4} \bmod(2\pi)$, d'où

$$z^4=1+i \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho^4=\sqrt{2} \\ 4\theta=\dfrac{\pi}{4} \bmod(2\pi) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho=2^{\frac{1}{8}} \\ \theta=\dfrac{\pi}{16} \bmod\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

D'où

$$\mathbb{S}_4=\left\{2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{\pi}{16}},\ 2^{\frac{1}{8}}e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)},\ 2^{\frac{1}{8}}e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\pi\right)},\ 2^{\frac{1}{8}}e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)}\right\}$$

Puisque tout nombre complexe admet des racines n-ièmes, intéressons-nous plus particulièrement aux racines n-ièmes de 1 :

1.2 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 3. *On appelle, comme dans la définition* 1., racine n-ième de l'unité *tout nombre complexe z racine du polynôme $U(Z)=Z^n-1$. On désigne par $\mathbb{U}_n=\{u_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k\in\{0,\ldots,n-1\}\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.*

Il faudrait montrer ici que $\mathbb{U}_n$ admet exactement n éléments, la preuve de ceci pouvant très fortement s'inspirer de celle faite pour la proposition 2..

Proposition 4. *Si z est une racine de $P(Z)=Z^n-z'$, alors $\mathbb{S}_n=\{z.u_k, u_k\in\mathbb{U}_n, k\in\{0,\ldots,n-1\}\}$*

Preuve. Si z est une racine de Z^n-z', alors $z^n=z'$. Il vient alors

$$\forall k\in\{0,\ldots,n-1\},\ (z.u_k)^n=z^n.u_k^n=z^n.\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n=z^n.e^{2ik\pi}=z^n=z'$$

■

Proposition 5. $(\mathbb{U}_n,.)$ *est un groupe pour la multiplication de $\mathbb{C}$. Il est de plus le seul sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ d'ordre n isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.*

Preuve. Montrons dans un premier temps que $(\mathbb{U}_n,.)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,.)$. Si $k=0$, alors $u_0=e^{i\frac{2\times 0\pi}{n}}=e^0=1\in\mathbb{U}_n$, donc $\mathbb{U}_n\neq\varnothing$. Puis, $\forall u_l,u_j\in\mathbb{U}_n$, $l,j\in\{0,\ldots,n-1\}$, on a

$$u_l.u_j^{-1}=e^{i\frac{2l\pi}{n}}e^{-i\frac{2j\pi}{n}}=e^{i\frac{2(l-j)\pi}{n}}=e^{i\frac{2k'\pi}{n}},\text{ avec } k'\in\{0,\ldots,n-1\}\text{ et } l-j\equiv k' \bmod(n)$$

Ainsi $(\mathbb{U}_n,.)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,.)$. Montrons maintenant l'unicité : S'il y avait un autre sous-groupe $(G,.)$ de $(\mathbb{C}^*,.)$ d'ordre n, alors pour tout $z\in G$, on aurait $z^n=1$, soit $z\in\mathbb{U}_n$, d'où $G\subset\mathbb{U}_n$. Comme G et $\mathbb{U}_n$ ont même cardinal, il résulte que $G=\mathbb{U}_n$.

Enfin, il reste à montrer que $(\mathbb{U}_n, .)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Soit l'application

$$\begin{aligned}\varphi \colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{U}_n \\ \bar{k} &\longmapsto u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}\end{aligned}$$

Montrons que φ est effectivement un morphisme de groupes : $\forall \bar{k}, \bar{k}' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a

$$\varphi(\bar{0}) = e^{i\frac{2\times 0\pi}{n}} = e^0 = 1 \text{ et } \varphi(\bar{k} + \bar{k}') = u_{k+k'} = e^{i\frac{2(k+k')\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}.e^{i\frac{2k'\pi}{n}} = u_k.u_{k'} = \varphi(\bar{k}).\varphi(\bar{k}')$$

Montrons l'injectivité : Si on a $u_k = u_{k'}$, alors $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}}$, d'où $\frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2k'\pi}{n} \mod(2\pi)$, ce qui implique que $k \equiv k' \mod(n)$, soit $\bar{k} = \bar{k}'$.

Comme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{U}_n$ ont même cardinal, on a bien que φ est un isomorphisme.

■

En particulier, on remarque que comme $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique, $(\mathbb{U}_n, .)$ l'est aussi par isomorphie.

Proposition 6. *Les générateurs de* $(\mathbb{U}_n, .)$ *sont les* $u_k \in \mathbb{U}_n$ *tels que* $\mathrm{PGCD}(k, n) = 1$.

Preuve. Notons $\mathbb{U}_n = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$. Soit u_k un générateur de $\mathbb{U}_n$, on a alors

$$\begin{aligned} u_k \text{ générateur de } \mathbb{U}_n &\Longleftrightarrow \exists k' \in \{0, \ldots, n-1\} \,|\, (u_k)^{k'} = u_1 \\ &\Longleftrightarrow e^{i\frac{2k'k\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n}} \\ &\Longleftrightarrow k'k \equiv 1 \mod(n) \\ &\Longleftrightarrow \exists k', u \in \mathbb{Z} \,|\, k'k + un = 1 \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{PGCD}(k, n) = 1 \text{ (par le théorème de Bézout)} \end{aligned}$$

■

2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe et lien avec la géométrie

Définition 7. *Soient* $M_0, \ldots, M_{n-1}$ *n points de* $\mathcal{P}$. *On dit que les* $(M_i)_{i \in \{0, \ldots, n-1\}}$ *sont les sommets d'un* n-gône (ou polygône) régulier *s'il existe un point I et une rotation de centre I et d'angle* $\frac{2\pi}{n}$ *envoyant* M_i *sur* M_{i+1}, $\forall i \in \{0, \ldots, n-2\}$ *et* M_{n-1} *sur* M_0.

On peut montrer que ce point I, dans le cas où il existe, est très particulier, puisqu'il s'agit de l'isobarycentre des points $(M_i)_{i \in \{0, \ldots, n-1\}}$.

Proposition 8. *Soit M un point d'affixe z'. Les racines n-ièmes de z', c'est à dire les z_k tels que* $z_k^n = z'$ *sont les affixes de points de* $\mathcal{P}$ *qui sont tous situés sur le cercle de centre O et de rayon* $r^{\frac{1}{n}}$. *De plus, si* $n = 2$, *ils sont diamétralement opposés et si* $n \geq 3$, *ils forment les sommets d'un n-gône régulier.*

Preuve. Notons $\mathcal{M}=\{M_k(z_k),\, z_k\in\mathbb{S}_n,\, k\in\{0,\dots,n-1\}\}$. Pour tout entier l dans $\{0,\dots,n-1\}$, on a $|z_l|=r^{\frac{1}{n}}$. Or, $r^{\frac{1}{n}}=|z_l|=|z_l-0|=\|\overrightarrow{OM_l}\|=OM_l$, donc tous les points de $\mathcal{M}$ sont sur le cercle de centre O et de rayon $r^{\frac{1}{n}}$.

De plus, si $n=2$, alors on a $\arg(z_0)=\frac{\alpha}{n}$ et $\arg(z_1)=\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{2}=\frac{\alpha}{n}+\pi$, ce qui prouve que les points $M_0(z_0)$ et $M_1(z_1)$ sont diamétralement opposés.

Si $n\geqslant 3$, pour tout entier $k\in\{0,\dots,n-2\}$, on a

$$z_k.e^{i\frac{2\pi}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}.e^{i\frac{2\pi}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}\right)}=z_{k+1}$$

et si $k=n-1$, on a

$$z_{n-1}.e^{i\frac{2\pi}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}.e^{i\frac{2\pi}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2(n-1+1)\pi}{n}\right)}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\alpha}{n}}.e^{2i\pi}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\alpha}{n}}=z_0$$

Ce qui prouve que pour $n\geq 3$, $\mathcal{M}=\{M_k(z_k),\, z_k\in S_n,\, k\in\{0,\dots,n-1\}\}$ forment les sommets d'un n-gône régulier.

■

Proposition 9. *Les points dont les affixes sont les racines n-ièmes de z' se déduisent des points dont les affixes sont les racines n-ièmes de l'unité par une similitude de centre O, de rapport $r^{\frac{1}{n}}$ et d'angle $\frac{\alpha}{n}$.*

Preuve. La similitude de centre O, de rapport $r^{\frac{1}{n}}$ et d'angle $\frac{\alpha}{n}$ est l'application $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ définie par $f(z)=az$, où $a\in\mathbb{C}^*$ avec $|a|=r^{\frac{1}{n}}$ et $\arg(a)=\frac{\alpha}{n}$. Soit alors $a=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\alpha}{n}}(=z_0)$. Par la proposition 4., puisque a est une racine de z', les autres racines de z' se déduisent par multiplication de a par une quelconque racine de l'unité, soit

$$\mathbb{S}_n=\{a.u_k,\, u_k\in\mathbb{U}_n,\, k\in\{0,\dots,n-1\}\}=\{f(u_k),\, u_k\in\mathbb{U}_n,\, k\in\{0,\dots,n-1\}\}$$

■

3 Quelques applications

3.1 Racines d'un polynôme

<u>Exercice 1.</u> Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme $P(Z)=Z^7+Z^4+Z^3+1$.
<u>Solution 1.</u> On vérifie que

$$P(Z)=(Z^4+1)(Z^3+1)$$

$$Z^3+1=0\Longleftrightarrow Z^3=-1=e^{-i\pi}\Longleftrightarrow Z=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\, k\in\{0,1,2\}$$

D'où $Z^3+1=\left(Z-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(Z-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)(Z+1)$

De même,

$$Z^4+1=0\Longleftrightarrow Z^4=-1=e^{-i\pi}\Longleftrightarrow Z=e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2l\pi}{4}\right)},\, l\in\{0,1,2,3\}$$

D'où $Z^4+1=\left(Z-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(Z-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(Z-e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(Z-e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)$

Les racines de $Q(Z)=Z^3+1$ et de $R(Z)=Z^4+1$ étant différentes, on a bien que P a sept racines simples, et ainsi que

$$P(Z)=\left(Z-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(Z-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(Z-e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(Z-e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\left(Z-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(Z-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)(Z+1)$$

3.2 Somme et produit des racines n-ièmes de l'unité

$$\begin{aligned} z^n=1 &\Longleftrightarrow (z-u_0)(z-u_1)\ldots(z-u_{n-1})=0 \\ &\Longleftrightarrow z^n-(u_0+u_1+\ldots+u_{n-1})z^{n-1}+\ldots+(-1)^n u_0\ldots u_{n-1}=0 \end{aligned}$$

et donc en particulier, on en déduit

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k=0 \quad \text{et que} \quad (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} u_k=1$$

3.3 Caractérisation d'un triangle équilatéral

Exercice 2. Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points de $\mathcal{P}$ munis de leurs affixes respectives. Montrer que ABC est un triangle équilatéral si, et seulement si $b+ja+j^2c=0$ (ou $c+ja+j^2b=0$), où $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Solution 2. Puisque j est une racine 3-ième de l'unité, on a par le paragraphe précédent

$$1+j+j^2=0$$

Considérons la rotation $\mathfrak{r}$ de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Deux cas se présentent :

1. Si $\mathfrak{r}(B)=C$, on a

$$(c-a)=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

   En remarquant que si $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, on a $-j^2=e^{i\frac{\pi}{3}}$, et ainsi

$$(c-a)=-j^2(b-a)\Longleftrightarrow c+(-1-j^2)a+j^2b=0\Longleftrightarrow c+ja+j^2b=0$$

2. Si $\mathfrak{r}(C)=B$, le même raisonnement nous conduit à l'autre égalité.

3.4 Construction du pentagone régulier « à la règle et au compas »

Exercice 3. On pose $\zeta=e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

i. Montrer que $1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4=0$

ii. Montrer que le polynôme $S(Z)=Z^2+Z-1$ admet $\zeta+\frac{1}{\zeta}$ comme racine.

iii. En déduire, en remarquant que $\bar{\zeta}=\frac{1}{\zeta}$, une expression de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

iv. En déduire une construction « à la règle et au compas » du pentagone régulier.

Solution 3.

i. C'est dû au fait que $\zeta^5 = 1$ et que $\zeta \neq 1$.

ii. $\zeta + \frac{1}{\zeta} = \zeta + \frac{\zeta^5}{\zeta} = \zeta + \zeta^4$ et $\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2 = \zeta^2 + 2 + \frac{1}{\zeta^2} = \zeta^2 + \frac{\zeta^5}{\zeta^2} + 2 = \zeta^2 + \zeta^3 + 2$

D'où $\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2 + \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - 1 = 2 + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta + \zeta^4 - 1 = 1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$

Donc $\zeta + \frac{1}{\zeta}$ est racine de S.

iii. $\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} = \bar{\zeta}$ d'où $\zeta + \frac{1}{\zeta} = \zeta + \bar{\zeta} = 2\Re(\zeta) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$. Or

$$\Delta_S = 1 - 4(-1) = 5 > 0$$

D'où S a deux racines

$$Z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0 \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$$

Or $\zeta + \frac{1}{\zeta} = Z_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \Longrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

iv. Il faut dans un premier temps construire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$: Au premier coup d'oeil, cela pourrait sembler compliqué, mais il est très simple en réalité de le faire ! En effet, la longueur de l'hypothénuse d'un triangle rectangle donc les côtés adjacents à l'angle droit sont de longueurs $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ est de... $\frac{\sqrt{5}}{4}$! Il suffit alors de tracer un cercle de centre O et de rayon 1, puis de reporter cette mesure sur le segment d'origine O et d'extrémité $M_0 = 1$. Comme on sait aussi construire $\frac{1}{4}$, on peut alors construire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, puis trouver le point $A\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), 0\right)$. Puis, en projetant A sur le cercle parallèlement à l'axe des ordonnées, on trouve le point M_1. Puis en reportant la longueur M_0M_1 sur le cercle, on trouve les trois autres points M_2, M_3 et M_4 tels que $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4M_0 = M_0M_1$, ce qui achève la construction du pentagone régulier. La figure ci-dessous illustre cette construction :

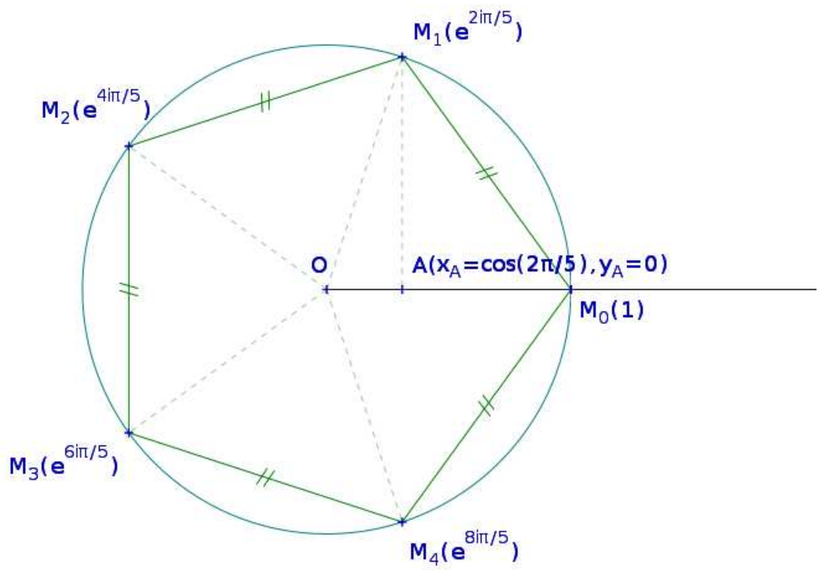

Figure 1. Construction du pentagone régulier « à la règle et au compas »

4 Annexes

4.1 PGCD de deux polynômes

4.2 Nombre de générateurs de $\mathbb{U}_n$

5 Compléments et bibliographie

A voir aussi :

– Construction « à la règle et au compas » du 17-gône régulier. Plusieurs liens pour ceci :

Bibliographie :

– http://www.capes-de-maths.com/
– http://astroplus.perso.neuf.fr/